ENCICLOPEDIE
PRATICHE
SANSONI

MARTIN GARDNER

ENIGMI E GIOCHI MATEMATICI

5
PARADOSSI DELLA PROBABILITÀ

La teoria delle probabilità è un campo della matematica insolitamente ricco di paradossi; verità che appaiono così in contrasto con il senso comune da esser difficilmente credibili anche dopo che ci si è trovati di fronte alla loro dimostrazione. Il paradosso delle date di nascita ne è un esempio dei più puri. Scegliendo a caso 24 persone quale ritenete sia la probabilità che due o più di essi abbiano lo stesso giorno di nascita? (ossia lo stesso giorno e mese dell'anno?). A intuito la riterrete assai bassa. In realtà essa è del 27/50, ossia superiore al 50 per cento!

George Gamow, in *Uno, due, tre ... infinito* dà il seguente semplice procedimento per giungere all'inaspettato risultato. La probabilità che i compleanni di due persone qualsiasi « non » cadano nello stesso giorno è evidentemente 364/365 (dato che vi è solo una possibilità su 365 che il compleanno di una persona coincida con quello di un'altra). La probabilità che il compleanno di una terza persona differisca da quello delle altre due è di 363/365; per una quarta è 362/365, e così via sino alla 24ª (342/365). Otteniamo così una serie di 23 frazioni che devono essere moltiplicate fra di loro per ottenere la probabilità che tutti i 24 compleanni siano differenti. Il prodotto finale è una frazione che si riduce a 23/50. In altre parole se doveste scommettere su una coincidenza almeno dei compleanni fra 24 persone, alla lunga perdereste 23 volte e vincereste 27 volte su cinquanta.

Questo calcolo ignora il 29 febbraio ed anche il fatto che i compleanni tendono a concentrarsi più in certi mesi che in altri; il primo fatto tende a diminuire la probabilità, il secondo ad aumentarla.

Questi valori sono così sorprendenti che il constatarli effettivamente in aula o in un salotto costituisce un divertente giochetto. Se sono presenti più di 23 persone fate scrivere ad ognuno la data del suo compleanno su un foglietto. Raccogliete e confrontate i biglietti. É più probabile che almeno due date coincidano piuttosto che non coincidano, con grande meraviglia dei presenti che possono essersi conosciuti per anni. Per fortuna non ha alcuna importanza se qualcuno bara dando una data falsa, le probabilità rimangono esattamente le stesse.

Un modo ancora più facile per controllare il paradosso è di confrontare le date di 24 nomi presi a caso da un *Chi è*? (Dizionario dei nomi illustri) o da un qualsiasi altro dizionario biografico. Naturalmente più si supera il numero di 24 nomi, maggiore diventa la probabilità di una coincidenza. La fig. 21 (da *Cento curiosità matematiche* di William R. Ramsom, 1955) mostra in forma grafica come la curva delle probabilità sale aumentando il numero delle persone. Il diagramma si ferma a 60 persone perché oltre quel numero la probabilità è troppo vicina alla certezza per poter distinguere la curva da una retta. Notare come la curva salga rapidamente fino a raggiungere le 40 persone e si appiattisca poi verso la certezza. Per 100 persone i vantaggi per una scommessa vincente su una coincidenza sono di circa 3.300.000 ad 1. La certezza assoluta non può essere raggiunta naturalmente sinché non si arrivi a 366 persone.

Un evidente esempio del paradosso è dato dalle date di nascita e di morte dei presidenti degli Stati Uniti. La probabilità di una coin-

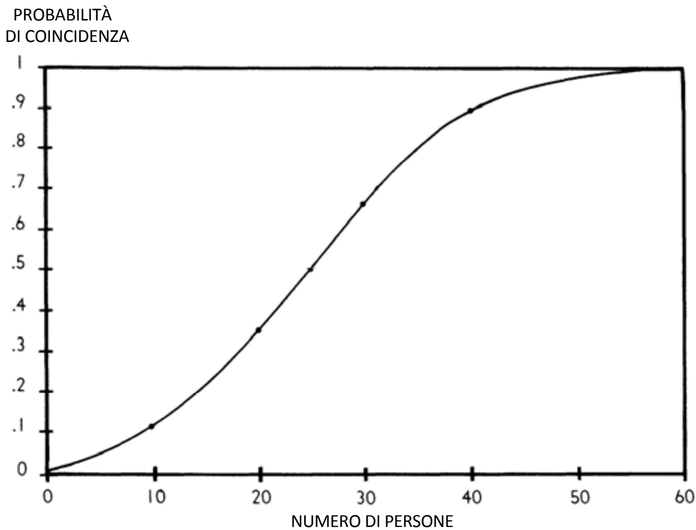

Fig. 21

cidenza in ciascun caso (33 date di nascita, 30 date di morte[1]) è vicina al 75 %. Polk ed Harding nacquero il 2 novembre, e ben tre presidenti, Jefferson, Adams e Monroe, morirono il 4 luglio.

Forse ancora più sbalorditivo è il « paradosso del secondo asso ». Supponiamo di giocare a bridge e che, distribuite le carte, diate uno sguardo alla vostra mano annunciando: « Ho un asso ». La probabilità che ne abbiate anche un secondo può essere calcolata esattamente. Si dimostra che è 5359/14498 che è meno di 1/2. Supponiamo, però, di indicare un particolare asso, quello di quadri. Il gioco continua sinché vi capita una mano per la quale potete dire: « Ho l'asso di quadri ». La probabilità che abbiate un altro asso è ora di 11686/20825 ossia leggermente superiore ad 1/2! Perché l'indicazione di un asso particolare influisce sulle probabilità?

Il calcolo materiale delle probabilità in questi due casi è lungo e noioso, ma il meccanismo del paradosso può essere compreso facilmente riducendo il mazzo a sole quattro carte: asso di picche, asso di cuori, due di fiori e fante di quadri. Se queste carte vengono mescolate e distribuite a due giocatori, vi sono solo sei combinazioni possibili (fig. 22) per un giocatore. Cinque di queste mani da due carte permettono al giocatore di dire: « Ho un asso », ma solo in un caso egli può averne un secondo. Perciò la probabilità del secondo asso è di 1/5. D'altra parte vi sono solo tre combinazioni che permettono al giocatore di dichiarare che ha l'asso di picche. Una di esse include anche l'altro asso, portando la probabilità del secondo asso ad 1/3. Un paradosso analogo è quello del secondo figlio. Il Sig. Rossi dice « Io ho due figli ed almeno uno di essi è maschio ». Qual è la probabilità che anche l'altro figlio sia un maschio? Si sarebbe tentati di dire 1/2, prima di elencare le tre combinazioni possibili di eguale probabilità: MM, MF, FM. Di queste una sola è MM, perciò la probabilità è 1/3. Se Smith avesse detto che il maggiore (o il più alto, o il più pesante, ecc.) dei figli è un maschio la situazione sarebbe stata del tutto differente. In questo caso le combinazioni sarebbero ristrette solo a MM e MF e la probabilità che l'altro figlio fosse un maschio salirebbe a 1/2. Se non fosse così ci sarebbe un modo molto ingegnoso di indovinare, con probabilità maggiore di un mezzo, la faccia di una moneta tenuta nascosta. Basterebbe lanciare in aria la moneta e se venisse testa ragionare « vi sono due

[1] Al momento in cui fu scritto il libro (N. d. T.) .

monete e una di esse (la mia) mostra testa. La probabilità che anche l'altra mostri testa è perciò 1/3, sicché io scommetto che è croce ». L'errore è, naturalmente, nel fatto di specificare quale moneta presenti testa. Ciò è lo stesso che identificare il figlio più grande con il maschio, il che cambia le probabilità in maniera similare.

Il più famoso di tutti i paradossi sulle probabilità è il paradosso di Pietroburgo, presentato per la prima volta in una pubblicazione dal famoso matematico Daniele Bernoulli all'Accademia di Pietroburgo. Supponiamo di lanciare una moneta da un centesimo con l'accordo che il lanciatore paghi all'avversario un dollaro se viene testa. Se invece viene croce il lancio viene ripetuto e se esce testa viene pagata la somma di due dollari. Se viene ancora croce il lancio è ripetuto una terza volta e vengono pagati quattro dollari se esce testa. In breve, la posta viene raddoppiata ad ogni lancio e si continua sin-

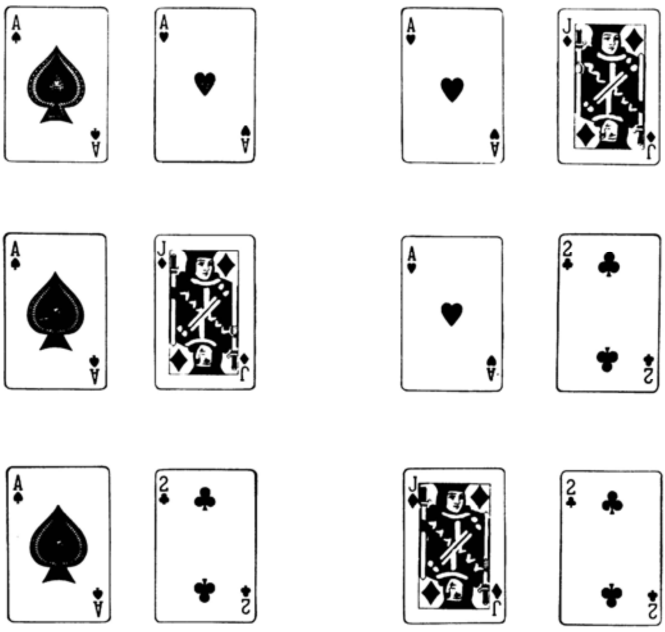

Fig. 22.

ché non viene richiesto il pagamento. Quanto dovrebbe mettere di posta l'avversario per avere il privilegio di giocare questo gioco unilaterale?

L'incredibile risposta è che potrebbe esser pagata qualsiasi somma, diciamo pure un milione di dollari, per ogni partita con la previsione di uscirne comunque in vantaggio. In ogni singola giocata vi è la probabilità di 1/2 di vincere un dollaro, di 1/4 di vincerne due, 1/8 per la vincita di quattro e così via. Perciò la vincita totale prevedibile sarebbe di $(1\times1/2)+(2\times1/4)+(4\times1/8)$ ... La somma di questa serie illimitata è infinita. Come risultato, qualunque fosse la somma pagata in anticipo per ogni partita, l'avversario vincerebbe alla fine giocando un sufficiente numero di partite. Si suppone che il capitale sia illimitato e che si possa giocare un numero illimitato di giocate. Pagando, ad esempio, 1000 dollari per una partita, vi è una forte possibilità che si perda. Ma questa previsione è più che bilanciata dal fatto di avere una possibilità, per quanto piccola, di vincere una somma astronomica dopo una lunga, ininterrotta serie di croci. Se il giocatore ha un ammontare finito di capitale, caso che si verifica in pratica, allora la posta equa del gioco è anch'essa finita. Il paradosso di Pietroburgo si presenta in ogni sistema di gioco « a raddoppio », e la sua analisi completa conduce ad un sacco di intricate deviazioni.

Carl G. Hempel, una figura di primo piano della scuola dei « positivisti logici » ed ora professore di filosofia all'Università di Princeton, scoprì un altro stupefacente paradosso sulla probabilità. Sin da quando fu esposto la prima volta nel 1937, nel periodico svedese « Theoria », il paradosso di Hempel è stato oggetto di molte dotte discussioni fra i filosofi della scienza in quanto esso tocca proprio il cuore del metodo scientifico.

Supponiamo, cominciò Hempel, che uno scienziato voglia esaminare l'ipotesi: « Tutti i corvi sono neri ». La sua ricerca consiste nell'esaminare il maggior numero possibile di corvi; più corvi neri egli trova, più probabile diventa l'ipotesi. Ogni corvo nero può perciò essere considerato una « conferma » dell'ipotesi. La maggior parte degli scienziati ritiene di aver una nozione perfettamente chiara di ciò che sia una « conferma ». Il paradosso di Hempel disperde subito questa illusione, perché si può provare facilmente con logica ferrea, che una mucca rossa è anche una conferma dell'ipotesi che tutti i corvi sono neri! Ecco come.

L'enunciato: « Tutti i corvi sono neri » può essere trasformato, con un procedimento che i logici chiamano « inferenza immediata », nell'enunciato, logicamente equivalente: « Tutti gli oggetti non-neri sono non-corvi ». Il secondo enunciato è identico nel significato all'originario; ne è semplicemente una differente formulazione verbale. Ovviamente, la scoperta di qualsiasi oggetto che confermi il secondo enunciato deve anche confermare il primo.

Supponiamo ora che lo scienziato ricerchi tutti gli oggetti non-neri per confermare l'ipotesi che tutti gli oggetti del genere sono non-corvi. Egli si imbatte in un oggetto rosso, Un esame più accurato mostra che non si tratta di un corvo ma di una mucca. La mucca rossa è chiaramente una conferma di: « Tutti gli oggetti non-neri sono non-corvi ». Perciò deve contribuire a rinforzare la probabile verità dell'ipotesi logicamente equivalente: « Tutti i corvi sono neri ». Naturalmente lo stesso ragionamento vale per un elefante bianco o per una aringa rossa o per la cravatta verde dello scienziato stesso. Come disse di recente un filosofo, nei giorni di pioggia un ornitologo dedito allo studio del colore dei corvi potrebbe continuare le sue ricerche senza doversi bagnare i piedi. Gli basterebbe guardare attorno nella sua stanza e rilevare gli esempi di oggetti non-neri che fossero non-corvi!

Come nei precedenti esempi di paradossi, la difficoltà sembra consistere non in un ragionamento errato ma in ciò che Hempel chiama « intuizione mal diretta ». La faccenda comincia ad avere un senso diverso considerando un esempio più semplice. Una ditta impiega un gran numero di dattilografe, delle quali sappiamo che alcune hanno i capelli rossi. Vogliamo controllare l'ipotesi che tutte queste ragazze dai capelli rossi sono sposate. Un modo ovvio di farlo è di domandare ad ogni dattilografa dai capelli rossi se ha marito. Ma c'è un altro modo, che potrebbe essere anche più efficiente: procuriamoci presso l'ufficio del personale un elenco di tutte le dattilografe non sposate e andiamo a trovare tutte le ragazze elencate su questo elenco per controllare il colore dei loro capelli. Se nessuna ha i capelli rossi la nostra ipotesi è completamente confermata. Nessuno discuterebbe il fatto che ogni dattilografa non sposata che non abbia i capelli rossi è una conferma della teoria che le dattilografe con i capelli rossi della ditta sono tutte sposate.

Non è difficile accettare questa procedura di analisi in quanto gli insiemi con cui si ha a che fare contengono un piccolo numero di elementi. Ma quando vogliamo tentare di determinare se tutti i corvi sono neri, abbiamo una enorme sproporzione fra il numero di corvi sulla terra ed il numero di oggetti non neri. Ognuno è d'accordo che il controllo degli oggetti non-neri è un modo estremamente inefficiente di effettuare la ricerca. Il problema in esame è il più sottile: se, cioè, ha significato dire che una mucca rossa è in un qualche senso una conferma. Viene aggiunta, almeno nel caso degli insiemi finiti (quelli infiniti ci conducono in acque assai più torbide) una sia pur piccola probabilità favorevole alla nostra ipotesi originaria? Alcuni logici pensano di sì. Altri non sono altrettanto sicuri. Essi mettono in risalto, per esempio, che si può dimostrare, esattamente con lo stesso ragionamento, come una mucca rossa sia una conferma di: « Tutti i corvi sono bianchi ». Come potrebbe la scoperta di uno stesso oggetto aumentare la probabilità di verità di due ipotesi contraddittorie?

Si sarebbe tentati di metter da parte il paradosso di Hempel con un sorriso ed una spallucciata. Bisogna però ricordare che molti paradossi logici che per molto tempo erano stati considerati come ordinarie curiosità si dimostrarono enormemente importanti nello sviluppo della logica moderna. Allo stesso modo le analisi del paradosso di Hempel hanno già fornito valide introspezioni nella natura oscura della logica induttiva, lo strumento con cui viene ottenuto tutto il sapere scientifico.

LIRE 1800 (•••)

ENCICLOPEDIE PRATICHE SANSONI

Tutte le magnifiche variazioni matematiche presentate qui da Martin Gardner — alcune semplici, altre meravigliosamente complicate — hanno questo in comune: sono ugualmente affascinanti sia per il lettore generico che per il matematico. Il contenuto riccamente vario si estende dalle figure di carta (sapete « flettere » un esaesaflexagono?) e dal filetto quadridimensionale alle bravure della memorizzazione matematica ed alle più recenti speculazioni sul nastro di Möbius. Vi sono i nuovi indovinelli ideati da alcuni dei più eminenti matematici odierni per puro divertimento o nel corso di serie ricerche. E vi şono ancora recentissime variazioni su giochi classici come l'antico gioco giapponese del « go moku ». Ma questo libro offre molto di più di un semplice divertimento. Ogni giochetto che esso contiene, ogni paradosso, gioco di società o rompicapo è stato scelto per il suo interesse matematico ed è accompagnato da lucidi commenti in cui M. Gardner mostra ai « non addetti » alcuni importanti ed affascinanti aspetti del pensiero matematico moderno.

5.321.045