Capitolo I

NOZIONI DI CALCOLO COMBINATORIO

1. Premessa

Uno degli strumenti fondamentali per la ricerca statistica è costituito dalla possibilità di stimare la probabilità del verificarsi degli eventi che caratterizzano ogni determinato problema.

E' questa la ragione per cui, dal punto di vista didattico, l'associazione del concetto di probabilità - che si vedrà nel capitolo successivo - alle nozioni di calcolo combinatorio è un aspetto importante, in quanto permette di collegare una scelta decisionale alla probabilità stimata con la quale l'evento atteso può manifestarsi, nel contesto di tutti gli eventi alternativi possibili. Si tratta cioè di individuare quanti sono i raggruppamenti possibili di un dato numero di elementi e quanti, fra questi raggruppamenti sono favorevoli all'evento atteso.

In particolare, per calcolare le probabilità richieste per la risoluzione di un problema di scelta, occorre prestare attenzione a quattro caratteristiche fondamentali degli eventi: si deve sapere se gli eventi *si escludono a vicenda* o meno, se essi sono *tutti ugualmente possibili*, se sono *casuali* e, infine se sono *indipendenti*. Il calcolo combinatorio di raggruppamenti semplici (se un elemento compare una ed una sola volta) o con ripetizione (se si ammette che uno stesso elemento possa comparire più volte nello stesso gruppo) permette di calcolare la probabilità con cui può avvenire ogni evento possibile che rispetti le quattro condizioni citate.

Nel calcolo combinatorio semplice i raggruppamenti possibili possono essere distinti in *permutazioni*, *Disposizioni* e *Combinazioni*. Vediamo quindi cosa si deve intendere con ciascuna di queste definizioni.

2. Permutazioni

Si abbiano n oggetti. Possiamo ordinare questi oggetti in modi diversi dando luogo a gruppi tutti formati dagli n oggetti, che però differiscono l'uno dall'altro per la posizione occupata da almeno uno degli n oggetti. L'operazione mediante la quale da un gruppo in cui gli oggetti sono ordinati in un certo modo si passa ad un altro in cui l'ordine degli oggetti è stato variato si dice permutazione. Pertanto, *il numero delle permutazioni di n oggetti distinti è il numero dei gruppi che si possono formare ordinando gli n oggetti in tutti i modi diversi possibili.*

Ad esempio, sia n = 3 e si indichino i tre oggetti con le lettere a, b e c. E' possibile ordinare i tre elementi suddetti in sei modi diversi, ottenendo le seguenti permutazioni:

abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Ognuno di questi ordinamenti è una permutazione dei 3 oggetti ed il numero di ordinamenti possibili con questi 3 oggetti è 6.

Il numero di permutazioni che possono essere formate con n oggetti considerati contemporaneamente è indicato con la scrittura P(n).

Quindi nel caso precedente P(3)= 6.

Cerchiamo ora di derivare una formula per P(n). Se invece di n oggetti ne avessimo (n-1), il numero di permutazioni che potremmo fare con essi sarebbe indicato con la scrittura P(n-1) ed ognuna di queste permutazioni conterrebbe (n-1) oggetti. Ora se prendiamo l'oggetto n-esimo e lo aggiungiamo ad ognuna delle permutazioni precedenti, otteniamo nuovi gruppi contenenti n oggetti ciascuno. Ma in ognuna delle permutazioni P(n-1) l'n-esimo oggetto può essere aggiunto in n modi diversi, inserendolo avanti al primo termine, oppure tra il primo ed il secondo, tra il secondo ed il terzo e così via.

Ad esempio, se si considera una qualsiasi delle 6 permutazioni dell'esempio precedente, poniamo quella formata dai tre oggetti bca, è possibile aggiungere un quarto oggetto d in quattro modi diversi, cioè:

dbca, bdca, bcda, bcad

e siccome le permutazioni dei tre oggetti a, b, c sono complessivamente 6, aggiungendo in ciascuna di esse il quarto oggetto d in tutte le posizioni possibili, si ottengono in tutto 24 permutazioni possibili dei 4 oggetti a, b, c, d, cioè P(4) = 4.P(3).

In generale, per n oggetti si ha P(n) = n.P(n-1) e scrivendo questa relazione per i diversi valori che può assumere n si avrà:

P(1) = 1
P(2) = 2.P(1)
P(3) = 3.P(2)
....
P(n-1) = (n-1).P(n-2)
P(n) = n.P(n-1)

Se ora si moltiplicano tra loro tutti i termini al primo membro delle relazioni precedenti ed il risultato si pone uguale al prodotto di tutti i termini che si trovano al secondo membro delle stesse relazioni, si ottiene:

P(1).P(2)........P(n-1).P(n)= 1.2.3.4.....(n-1).n.P(1).P(2)......P(n-1)

e, semplificando i termini che si trovano a sinistra ed a destra di tale relazione, si ottiene, infine:

P(n) = 1.2.3.....(n-1).n

Si è soliti indicare questo prodotto con il simbolo n! che si legge "n fattoriale" e si scrive, quindi: P(n) = n!

Per concludere: "*" Il numero delle permutazioni possibili di n oggetti è pari al prodotto dei primi n numeri interi, cioè n fattoriale".*

3. Permutazioni con oggetti uguali

Se degli n oggetti a sono eguali tra loro, b eguali fra loro, c eguali fra loro, ecc., l'insieme delle permutazioni possibili con n oggetti sarà formato da gruppi di oggetti non tutti differenti l'uno dall'altro. Il numero complessivo di queste permutazioni sarà dato dalla relazione:

$$P(n;a,b,c,...) = \frac{n!}{a!\,b!\,c!...}$$

Infatti, quando si debbono considerare le permutazioni di oggetti che non sono tutti diversi tra loro, si deve tenere conto del fatto che gli oggetti identici possono essere scambiati tra loro senza mutare la qualità della permutazione.

Si tratta quindi di determinare il numero complessivo di modi in cui n oggetti possono essere ordinati in modo che nessuno degli ordinamenti possibili sia ripetuto.

Ad esempio, si considerino i quattro oggetti a, b, c, d e con essi si formino le 4! = 24 permutazioni possibili:

abcd, abdc, adbc, dabc, acbd, acdb, adcb, dacb,
bacd, badc, bdac, dbac, bcad, bcda, bdca, dbca,
cabd, cadb, cdab, dcab, cbad, cbda, cdba, dcba.

Se ora, si suppone che sia a=b e c=d, i precedenti raggruppamenti possono essere riscritti come segue:

aacc, aacc, acac, caac, acac, acca, acca, caca,
aacc, aacc, acac, caac, acac, acca, acca, caca,
caac, caca, ccaa, ccaa, caac, caca, ccaa, ccaa

e quindi in tutto vi saranno solo le 4!/(2!.2!)= 6 permutazioni diverse che seguono:

aacc, acac, caac, acca, caca, ccaa.

4. Disposizioni

Dati n oggetti distinti e un numero k<n, si chiamano disposizioni semplici di classe k (o a k a k) degli n oggetti i gruppi ordinati che si possono formare con k oggetti distinti scelti fra gli n dati, in modo che ogni gruppo differisca dagli altri perché contiene *almeno un oggetto diverso,* o perché, pur contenendo gli stessi oggetti, l'*ordine* di questi in ogni gruppo differisce da quello degli altri gruppi.

Il numero delle disposizioni di n elementi k a k si indica con il simbolo D(n,k) e, come si vedrà tra poco, esso è definito dalla espressione:

$$D(n,k) = n.(n-1).(n-2)......(n-k+1)$$

cioè è pari al prodotto di k fattori consecutivi decrescenti a partire da n.

Per esempio, se n = 3 e k = 2, gli ordinamenti possibili di tre oggetti a, b, c presi due alla volta sono D(3,2) = 6, ossia:

ab, ac, ba, bc, ca, cb

Invece, con gli n=4 oggetti a, b, c, d si possono formare le 12 seguenti disposizioni di k=2 oggetti ciascuna:

ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc

che differiscono tra loro per almeno un oggetto o per la posizione degli oggetti.

Cerchiamo ora di ricavare una formula generale per il numero D(n,k) delle disposizioni di n oggetti presi a k a k, ragionando nella maniera che segue.

Supponiamo di formare tutte le disposizioni di n oggetti presi (k-1) alla volta, il numero di queste sarà D(n,k-1). Ora per ognuna di queste poniamo nello stesso posto uno dei rimanenti (n-k+1) oggetti. Ogni volta che facciamo questa operazione, avremo un raggruppamento diverso di k oggetti presi dagli n. Quindi il numero complessivo delle disposizioni di n oggetti a k a k è dato dalla relazione:

$$D(n,k) = (n-k+1).D(n,k-1).$$

Ora per diversi valori di k abbiamo:

$$D(n,1) = n$$
$$D(n,2) = (n-1).D(n,1)$$
$$D(n,3) = (n-2).D(n,2)$$
....
$$D(n,k-1) = (n-k+2).D(n,k-2)$$

$$D(n,k) = (n-k+1).D(n,k-1).$$

Moltiplicando tra loro i termini che si trovano in ciascuno dei due lati delle relazioni sopra scritte e semplificando i fattori simili si ottiene:

D(n,1).D(n,2).D(n,3)........D(n,k-1).D(n,k)=
= n.(n-1).(n-2).......(n-k+1).D(n,1).D(n,2). .....D(n,k-1)

e quindi, in definitiva sarà:

D(n,k) = n.(n-1).(n-2)......(n-k+1).

Moltiplicando e dividendo il secondo membro di questa espressione per (n-k)! = 1.2.3....(n-k), si ottiene infine la relazione:

$$D(n,k) = n.(n-1).(n-2).\dots\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{P(n)}{P(n-k)} = P(n;n-k)$$

Questo risultato permette anche di dire che *il numero delle disposizioni di n elementi a k a k è uguale al numero delle permutazioni di n elementi, dei quali (n-k) uguali tra loro.*

E' questa la ragione per cui in parecchi testi disponibili in letteratura non si trova menzione delle disposizioni, accanto a quella delle permutazioni e delle combinazioni, ma sono citate soltanto queste ultime due.

5. Combinazioni

Dati n oggetti distinti e fissato un numero intero k<n, si dicono combinazioni semplici degli n elementi a k a k (o di classe k) i gruppi di k oggetti distinti che si possono estrarre dagli n dati, <u>senza tener conto dell'ordine</u> in cui gli elementi compaiono nel gruppo (cioè due gruppi che contengono gli stessi elementi, ma in ordine diverso, sono da considerare come una stessa combinazione).

Il numero delle combinazioni di n elementi a k a k si indica con C(n,k) ed è pari a:

$$C(n,k) = \frac{D(n,k)}{P(k)} = \frac{n.(n-1).(n-2).\dots\dots(n-k+1)}{1.2.3.\dots\dots\dots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Per esempio, se con gli oggetti a, b, c formiamo le combinazioni a due a due avremo:

ab, ac, bc

mentre se con gli oggetti a, b, c, d formiamo le combinazioni a tre a tre avremo:

abc, abd, acd, bcd.

Si vede quindi che C(3,2) = 3, mentre C(4,3) = 4. Se per contro si considerano le disposizioni possibili nei due casi con gli stessi elementi, si ha D(3,2) = 6 e D(4,3) = 24. Cioè C(3,2) è la metà di D(3,2) perché si contano come se fossero un gruppo solo le permutazioni possibili in ogni gruppo, cioè le coppie ab e ba, ac e ca, bc e cb.

Similmente C(4,3) è sei volte più piccolo di D(4,3) perché si contano una sola volta le sei diverse permutazioni di ciascuno dei gruppi abc, abd, acd, bcd. Infatti, le permutazioni abc, acb, bac, bca, cab, cba sono contate come se fossero una sola combinazione, perché esse sono formate dagli stessi oggetti collocati solo in ordine diverso. E la stessa cosa si può dire per le altre tre combinazioni.

Applicando la formula generale, dunque, il numero delle combinazioni possibili ad esempio con 7 oggetti presi 4 alla volta è pari a:

$$C(7,4) = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.3.2.1} = 35 .$$

Si considerano talvolta anche le combinazioni con ripetizione, quando si ammette che ogni elemento possa entrare in ciascun gruppo anche più di una volta. Il numero delle combinazioni con ripetizione di n elementi a k a k è pari a:

$$C(n,k) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(n+k-1)(n+k-2).\dots.(n+1).n}{1.2.3.\dots\dots k}$$

Il numero delle combinazioni senza ripetizione di n oggetti presi tutti insieme è evidentemente uguale ad 1, cioè C(n,n) = 1 ed infatti, ponendo k = n nell'espressione:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

si avrà:

$$C(n,n) = \frac{n!}{n!0!} = 1 .$$

cosicché il simbolo 0! deve essere considerato equivalente ad 1.

Si dimostra che valgono le relazioni seguenti::

C(n,k) = C(n,n-k)

ed inoltre

C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1) .

6. Riepilogo delle principali regole del calcolo combinatorio

Le regole generali del calcolo combinatorio sono di grande ausilio per la risoluzione di problemi che implicano il calcolo della probabilità del verificarsi di determinati eventi. Esse permettono infatti di calcolare il numero dei modi in cui un evento si può presentare, una volta che siano state fissate le condizioni da soddisfare.

Tali regole possono essere riassunte come segue.

Definizione 1.
Se n è un numero intero positivo, il prodotto 1.2.3..........(n-1).n è definito dal simbolo n! e si legge "n fattoriale".

Definizione 2.
Posto che sia n = 0, si ammette per convenzione che il fattoriale di 0 sia pari all'unità e si scriverà 0! = 1.

Definizione 3.
Dati n oggetti distinti, il numero dei modi diversi in cui essi possono essere raggruppati facendo in maniera che i gruppi contengano gli stessi n oggetti ordinati in modo diverso costituisce il numero delle permutazioni di n oggetti in tutti i modi possibili e viene indicato con il simbolo P(n).

Teorema 1.
P(n) = n!.

Definizione 4.
Il numero dei modi in cui si possono selezionare ed ordinare k oggetti scelti tra n oggetti distinti costituisce il numero delle disposizioni di n oggetti di classe k (o a k a k) ed è indicato con il simbolo D(n,k).

Teorema 2.

$$D(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definizione 5.
Il numero complessivo delle possibili selezioni di k oggetti scelti tra n oggetti distinti costituisce il numero delle combinazioni di n oggetti presi k alla volta e viene indicato con il simbolo C(n,k).

Teorema 3.

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Teorema 4.
C(n,k).= C(n,n-k)

Teorema 5.
C(n,n).= C(n,0) = 1

Definizione 6.
Se $k < 0$ oppure se $k > n$ é C(n,k) = 0.