Esempio V.3 -Stimatore di massima verosimiglianza per media e varianza della distribuzione normale

$$f(x)=\frac{1}{c_0\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-c_1)^2}{2c_0^2}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Massimizzare la funzione di massima verosimiglianza:

$$L=\prod\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

equivale a massimizzare:

$$\log L=\log\left(\prod\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)=\sum\log\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)=$$

$$\log L=\sum\log\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)=-\sum\log\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)+\sum\log\left(e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)=$$

$$=-\sum\log\sigma-\sum\log\sqrt{2\pi}-\sum-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

uguagliando a zero le derivate si ha:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\log L}{\partial\sigma}=-\dfrac{\sum 1}{\sigma}+\dfrac{\sum(x_i-\mu)^2}{\sigma^3}=0\\[2ex]\dfrac{\partial\log L}{\partial\mu}=\dfrac{\sum(x_i-\mu)}{\sigma^2}=0\end{cases}$$

La prima di queste due relazioni fornisce

$$\sigma^2\sum 1=\sigma^2 n=\sum(x_i-\mu)^2$$

e la seconda

$$\mu=\frac{\sum x_i}{n}=\bar{x}$$

Quindi, sostituendo si ha, infine:

$$\sigma_x^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}\;.$$