CONFRONTO TRA DISTRIBUZIONE OSSERVATA E TEORICA O ATTESA

Nella teoria statistica e nella pratica sperimentale, è frequente la necessità di verificare se esiste accordo tra una distribuzione osservata e la corrispondente distribuzione attesa o teorica.

Questa verifica viene eseguita mediante l'impiego di un test che viene definito *test per la bontà dell'adattamento* (in inglese, goodness of fit test).

Il test χ^2_n (chi-quadro o chi-quadrato) di Pizzetti-Pearson storicamente *è stato costruito proprio a questo scopo*.

E' un metodo di inferenza statistica che non richiede ipotesi "a priori" sul tipo e sulle caratteristiche della distribuzione, come invece avviene per la statistica parametrica che fa riferimento alla distribuzione normale. Sono metodi *non parametrici*.

Il test del χ^2_n

Il test del χ^2_n serve per il *confronto tra 2 o più distribuzioni*;

L'interesse consiste nel *trarre conclusioni generali dal singolo esperimento*; in altri termini, nel *conoscere la probabilità con cui le differenze tra una distribuzione osservata e quella attesa possono riprodursi per caso, in una serie di esperimenti analoghi.*

Il test χ^2_n, utilizza non le frequenze relative o percentuali, ma le *frequenze assolute*, con la formula

$$\chi^2_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(f_i^{oss} - f_i^{att}\right)^2}{f_i^{att}}$$

dove:

f_i^{oss} = frequenza osservata i-esima

f_i^{att} = frequenza attesa i-esima

***Il numero di g.d.l* corrisponde al numero di osservazioni indipendenti.**

Infatti *le frequenze attese di ogni gruppo, che sono calcolate dal totale dei casi ed attribuite ad ogni gruppo secondo la legge di distribuzione, sono libere di assumere qualsiasi valore; ma fa eccezione la frequenza attesa dell'ultimo gruppo*, la quale è totalmente determinata dalla differenza tra la somma delle frequenze relative a tutti i gruppi precedenti, già definiti, ed il totale.

Quando tra n variabili casuali sussistono k vincoli lineari, ossia relazioni che riducono il numero di osservazioni indipendenti, i gradi di libertà del corrispondente $\chi^2_{(g.d.l.)}$ diminuiscono di un numero pari a k e sono, quindi, pari a (n-k). Si può anche dire che il numero dei gradi di libertà è determinato dai vincoli, di qualsiasi natura, che esistono fra le frequenze dei vari gruppi.

Tuttavia, nell'applicazione del test χ^2 per misurare la bontà dell'adattamento dobbiamo tenere presente che, in generale, i parametri che caratterizzano la distribuzione teorica non sono noti, ma sono sostituiti dalle loro stime ricavate dai dati osservati.

Ciò vuol dire che *il numero dei gradi di libertà deve essere ridotto di una unità ogni volta che un parametro viene sostituito dalla sua stima*.

Per esempio, per una curva normale, il numero dei gradi di libertà per il test χ^2 è inferiore di 3 unità rispetto al numero delle frequenze, perché l'equazione della curva normale dipende dai parametri N, M e σ. Se si fosse adattata una distribuzione di Poisson, i gradi di libertà sarebbero stati solo di 2 unità inferiori al numero delle frequenze, perché la curva di Poisson dipende solo dai due parametri: N ed M.

Quando, in alcuni problemi, uno o più di questi parametri sono noti in base ad altre considerazioni, nel procedere all'adattamento della curva è necessario usare i loro valori veri invece delle loro stime campionarie. In tali casi, i gradi di libertà saranno uguali al numero delle frequenze diminuito di una unità, perché il valore di N è sempre preso dai dati osservati.

Per la comprensione del test del χ^2, è utile ricordare che *quanto più le differenze tra valori osservati ed attesi sono grandi, tanto più il valore del* χ^2 *sarà elevato;* di conseguenza, *la probabilità che tali differenze siano dovute solo al caso sarà bassa e si rifiuterà l'ipotesi nulla,* accettando implicitamente l'ipotesi alternativa H1. Al contrario, *quando le differenze tra valori osservati ed attesi sono ridotte, ugualmente basso sarà il valore del* χ^2*; pertanto, sarà elevata la probabilità che esse siano imputabili esclusivamente al caso e si accetterà l'ipotesi nulla H0.*

Esempio X.24

Frequenze osservate f	Frequenze teoriche f'
4	2,106
20	18,642
28	23,868
12	20,202
8	10,842
6	2,340

Si applichi ora il test χ^2 per determinare se la curva normale si è adattata bene alla distribuzione ottenuta dall'osservazione:

$$\chi^2 = \left(\frac{4^2}{2{,}106} + \frac{20^2}{18{,}642} + \frac{28^2}{23{,}868} + \frac{12^2}{20{,}202} + \frac{8^2}{10.84} + \frac{6^2}{2{,}340} \right) - 78 =$$

$$\chi^2 = \left(\frac{4^2}{2{,}106} + \frac{20^2}{18{,}642} + \frac{28^2}{23{,}868} + \frac{12^2}{20{,}202} + \frac{8^2}{10.84} + \frac{6^2}{2{,}340} \right) - 78 =$$

$$= (7{,}59 + 21{,}45 + 32{,}85 + 7{,}12 + 5{,}90 + 15{,}38) - 78 = 90{,}31 - 78 = 12{,}31$$

Nell'adattare la curva normale N, M e σ sono stati presi dai dati osservati. Quindi, i gradi di libertà saranno v= 6-3 = 3, cioè uguali al numero delle frequenze diminuito di 3.

Sulla tavola del χ^2 con v = 3 gradi di libertà si vede che il livello di significatività del 5% corrisponde ad un χ^2 = 7,815, il livello di significatività dell'1% corrisponde ad un χ^2 = 11,341. Poiché χ^2 = 12,31 corrisponderà ad una probabilità inferiore all'1%,
Possiamo concludere che la discrepanza tra frequenze osservate e frequenze teoriche è *troppo grande*; quindi, la scelta della curva normale non è stata molto appropriata per rappresentare la distribuzione data.

Secondo uno schema valido per tutti i test statistici, il procedimento logico che deve essere seguito nell'applicazione del χ^2_n comprende diverse fasi, che possono essere riassunte in 7 passaggi:

1 - stabilire l'ipotesi nulla (H0) e l'eventuale ipotesi alternativa (H1);

2 - scegliere il test più appropriato per saggiare l'ipotesi nulla H0, secondo le finalità della ricerca e le caratteristiche statistiche dei dati (in questo caso, ovviamente, è il test chi quadrato);

3 - specificare il livello di significatività, l'ampiezza del campione e i gradi di libertà;

4 - trovare la distribuzione di campionamento del test statistico nell'ipotesi nulla H0, di norma fornita da tabelle;

5 - stabilire la zona di rifiuto (di norma prefissata al 5%, all'1% o all'1%o);

6 - calcolare il valore del test statistico sulla base dei dati sperimentali, stimando il valore di probabilità ad esso associato;

7 - sulla base della probabilità, trarre le conclusioni: se la probabilità risulta superiore a quella prefissata, concludere che non è possibile rifiutare l’ipotesi nulla H_0; se la probabilità risulta inferiore a quella prefissata, rifiutare l’ipotesi nulla e quindi implicitamente accettare l’ipotesi alternativa H_1.