Processi stocastici Un processo stocastico è una funzione casuale X(t) i cui valori sono variabili aleatorie. Per esempio la temperatura in un dato punto della terra in funzione del tempo, oppure la sequenza dei valori di una data azione in borsa al variare di t.

La funzione di distribuzione Fx(x,t) è data da:

$$Fx(x,t)=P(\ X(t)<= x\ )$$

Processi stocastici stazionari Un processo stocastico è detto stazionario se la funzione **Fx(x,t)** è invariante al cambiare di t. Se quindi per ogni costante τ al variare di t ed x vale :

$$Fx(x,t+\tau)=Fx(x,t)$$

(lo studio dei processi stocastici stazionari è semplificato rispetto allo studio dei processi non stazionari)

Processi indipendenti Il più semplice processo stocastico è quello che si ha ottenendo una sequenza casuale dove: ###**Xn**### forma un insieme di variabili indipendenti. In questo caso non vi è dipendenza nella realizzazione ennesima (al tempo t) dalle precedenti realizzazioni.

Processi di Markov Nel 1907 A.Markov presentò le proprietà di quelli che oggi sono chiamati processi markoviani. Un insieme di variabili aleatorie ###Xn### forma una catena di Markov se la probabilità che il prossimo valore (stato) X_{n+1} sia pari ad x_{n+1} dipende solo dal corrente valore (stato) x_n e non da qualsiasi stato precedente. Abbiamo quindi una sequenza casuale nella quale la dipendenza si estende all'indietro di una unità di tempo: "l'influenza che l'intera sequenza storica delle realizzazioni di x ha sul futuro del processo è interamente racchiusa nel corrente valore del processo.

Nel caso di una catena di Markov a intervalli di tempo ***discreti*** gli istanti in cui avvengono i cambiamenti di stato sono preordinati (1,2,..n). Nel caso invece di catene di markov ***continue*** nel tempo la transizione fra stati avviene in un qualsiasi istante, si deve quindi considerare la variabile aleatoria che descrive il cambiamento di stato.

Il tempo che il sistema rimane in un dato stato è una variabile aleatoria con una sua distribuzione di probabilità.

Per mantenere l'assunto di Markov che tutta le passata storia sia riassunta nell' attuale stato il tempo già speso in un dato stato ***non deve influenzar***e il tempo ancora rimanente prima della prossima transizione.

La funzione di distribuzione degli intervalli fra i passaggi di stato può quindi essere solo una funzione ***esponenziale*** che ha questa caratteristica di essere senza memoria, in altre parole la funzione di distribuzione del tempo che ancora rimane prima del cambiamento di stato non dipende dal tempo che già si è trascorso in quello stato se e solo se la funzione è esponenziale : $f(t)=\lambda \exp\ (-t\lambda)$

Processi di nascita e morte

- Una particolare classe dei processi markoviani
- processi discreti o continui da un punto di vista temporale
- la transizione da uno stato all'altro avviene solo per stati contigui. Questo significa che scegliendo l'insieme degli interi a rappresentare gli stati del sistema se X_n=i, X_{n+1} sarà uguale a i-1,i o i+1 tutti gli altri valori esclusi.

Processi semi-markoviani

- I cambiamenti di stato avvengono secondo intervalli di tempo distribuiti secondo una qualsiasi legge di distribuzione.
- Al momento del cambio di stato la legge di cambiamento è la stessa che per i processi di Markov ed è quindi indipendente da tutta la storia precedente del processo, ma quando il processo è in un determinato stato, per ricavare la distribuzione della variabile aleatoria rappresentativa del tempo che intercorre prima del nuovo cambiamento, è necessario sapere quanto tempo si è già speso in quel determinato stato. I processi di Markov sono tutti processi semi-markoviani.

Cammini casuali (Random Walk)

- Un cammino casuale può essere assimilato a quello di una particella che si muove fra stati in uno spazio di stati (che può essere anche continuo).
- La posizione successiva che il processo andrà ad occupare è uguale alla posizione attuale più una variabile aleatoria indipendente distribuita secondo un' arbitraria legge di probabilità. Questa legge non cambia con lo stato del processo (eccetto per alcuni stati detti di confine) differenziando le camminate casuali dalla classe generale dei processi semi-markoviani.
- Quindi una sequenza di variabili aleatorie ###Sn### è la conseguenza di un cammino casuale se :
- Sn= X1+X2+X3+.....+Xn n=1,2,3...,n dove S0=0 ed X1,X2..Xn è una sequenza di variabili indipendenti con una distribuzione comune.

Processi di rinnovo (Renewal Process)

Un processo di rinnovo è parte di un processo di cammino casuale. La differenza è che *non si segue il passaggio* fra stati, ma contano soltanto *le transizioni fra stati* come funzione del tempo. Può essere anche considerato come un caso particolare di cammino casuale.

Se consideriamo l'asse reale dei tempi, sul quale si trovano una sequenza di punti che rappresentano una transizione di stato di un cammino casuale, la distribuzione dei tempi fra i diversi punti è un processo di rinnovo

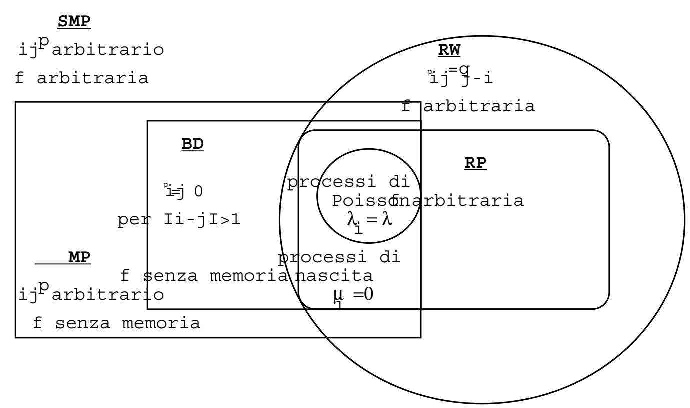

Diagramma dei processi semimarkoviani

SMP = processi semimarkoviani (Semi Markov Process),
RW = processi di cammino casuale (Random Walk),
MP = processi markoviani (Markov Process),
BD = processi di nascita e morte (Birth and Death process),
RP = processi di rinnovo (Renewal process)